

An abstract graphic consisting of a dark blue 3D cube with a red sphere resting on its top surface. The cube is tilted, and the sphere is positioned slightly off-center towards the back-left corner of the top face.

Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

IDRODINAMICA

Equazioni Cardinali della Dinamica

► Quantità di moto e momento della q.d.m.

- Quantità di moto di una particella fluida

$$d\vec{q} = \vec{u} dm = \rho \vec{u} dV$$

- Quantità di moto di un volume materiale V_m

$$\vec{q} = \int_{V_m} \rho \vec{u} dV$$

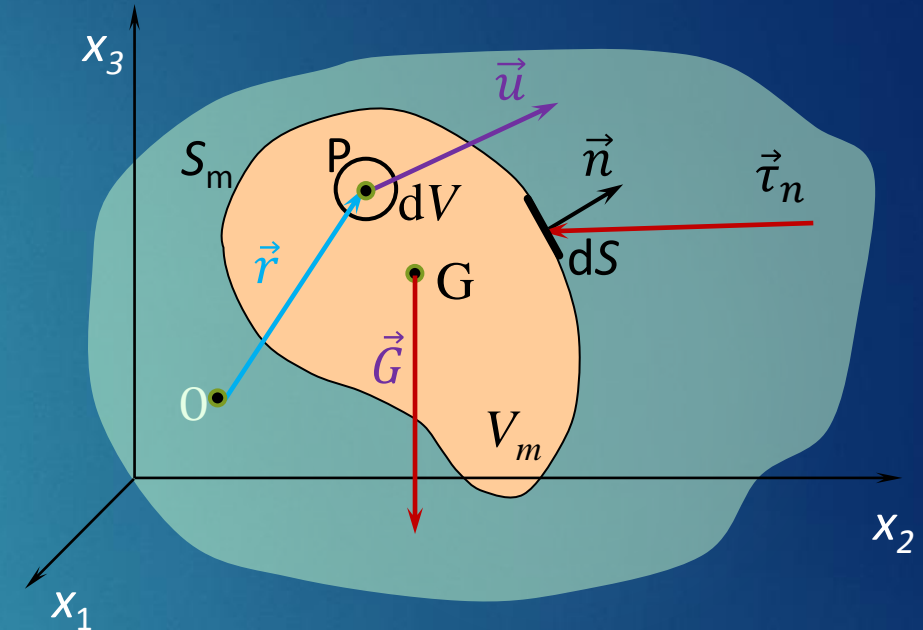
- Momento della q.d.m. di un volume materiale

$$\vec{\Gamma} = \int_{V_m} \vec{r} \times \rho \vec{u} dV$$

► Bilancio della quantità di moto

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \vec{G} + \vec{\Pi}$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \vec{u} dV = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_m} \vec{\tau}_n dS$$



► Bilancio del momento della quantità di moto

$$\frac{D\vec{\Gamma}}{Dt} = \vec{M}_G + \vec{M}_\Pi$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \vec{r} \times \rho \vec{u} dV = \int_{V_m} \vec{r} \times \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_m} \vec{r} \times \vec{\tau}_n dS$$

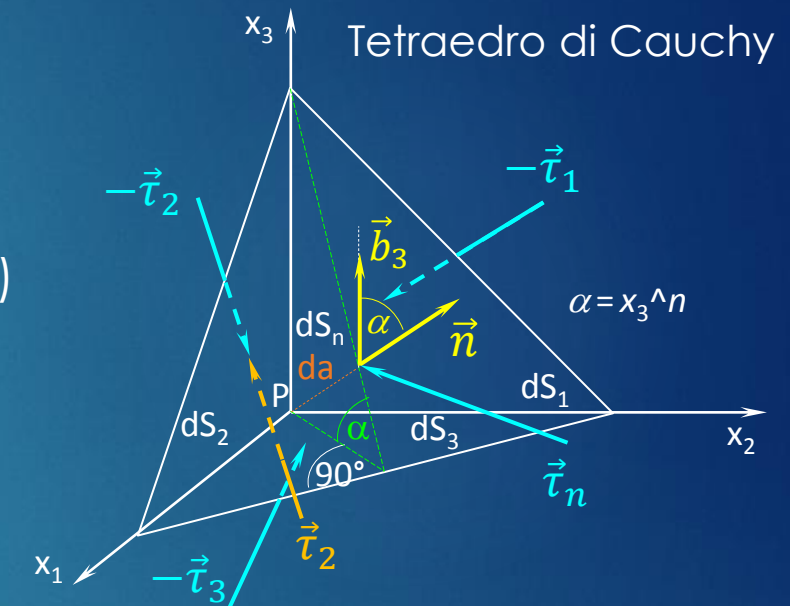


Stato di sforzo - Teorema di Cauchy

► Bilancio della quantità di moto su volume materiale tetraedrico

- $\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \vec{u} dV = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_m} \vec{\tau}_n dS$
- V_m infinitesimo $\longrightarrow \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV = \rho \vec{f}_m dV$; $\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \vec{u} dV = \frac{D}{Dt} (\rho \vec{u} dV)$
- Conservazione massa: $dm = \rho dV = \text{cost} \longrightarrow \frac{D}{Dt} (\rho \vec{u} dV) = \rho dV \frac{D\vec{u}}{Dt}$
- $\rho dV \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m dV + \vec{\tau}_n dS_n - \vec{\tau}_1 dS_1 - \vec{\tau}_2 dS_2 - \vec{\tau}_3 dS_3$
 - $\vec{\tau}_j$ sforzo su faccia dS_j verso x_j crescenti ($\vec{n} = \vec{b}_j$)
 - ✓ $dS_n, dS_j = o(da)^2$; $dV = o(da)^3 \ll dS_n, dS_j$
- $\vec{\tau}_n dS_n - \vec{\tau}_1 dS_1 - \vec{\tau}_2 dS_2 - \vec{\tau}_3 dS_3 = 0$ ($\vec{\tau}_n dS_n = \vec{\tau}_j dS_j$)
 - ✓ dS_j proiezione di dS_n su piano normale a x_j

$$dS_j = dS_n \cos x_j \wedge n$$



- $\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_j \frac{dS_j}{dS_n} = \vec{\tau}_j \cos x_j \wedge n = \vec{\tau}_j n_j$ (T. di Cauchy)

$$\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_j \cos x_j \wedge n$$

- ✓ $\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_1 \cos x_1 \wedge n + \vec{\tau}_2 \cos x_2 \wedge n + \vec{\tau}_3 \cos x_3 \wedge n$



Stato di sforzo - Teorema di Cauchy

► Teorema di Cauchy $\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_j \cos x_j \wedge n = \vec{\tau}_j n_j$

- ✓ Lo stato di sforzo in un punto è rappresentato da un *tensore*
- ✓ Note 3 componenti vettoriali $\vec{\tau}_j$ ($j = 1, 2, 3$) si ottengono gli ∞^2 sforzi $\vec{\tau}_n$

- Componenti di $\vec{\tau}_n$ sugli assi coordinati x_i

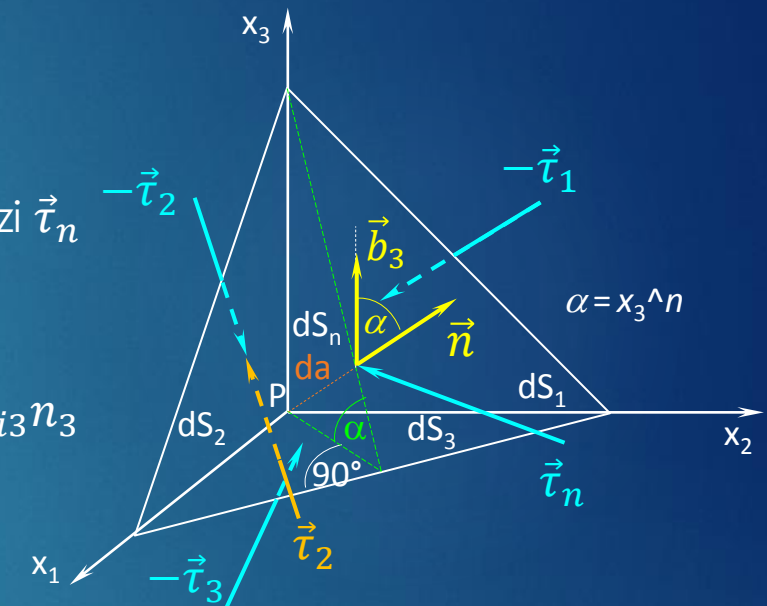
$$\tau_{in} = \vec{\tau}_n \cdot \vec{b}_i = \vec{\tau}_j \cos x_j \wedge n \cdot \vec{b}_i = \tau_{ij} \cos x_j \wedge n = \tau_{ij} n_j = \tau_{i1} n_1 + \tau_{i2} n_2 + \tau_{i3} n_3$$

- ✓ 1° pedice rappresenta l'asse al quale è riferita la componente
- ✓ 2° pedice rappresenta normale a faccia su cui agisce lo sforzo

- Rappresentazione matriciale

$$\vec{\tau}_n = \begin{pmatrix} \tau_{1n} \\ \tau_{2n} \\ \tau_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\tau}} \vec{n}$$

- ✓ $\underline{\underline{\tau}}$ = *tensore degli sforzi* (tensore \equiv matrice associata)



- Tensore degli sforzi $\underline{\underline{\tau}}$

- ✓ tensore *doppio* (due pedici)
- ✓ 9 componenti scalari (della matrice associata)
- ✓ 3 componenti vettoriali (vettori colonna della matrice)



Tensore degli sforzi

► Stato di sforzo idrostatico

$$\vec{\tau}_n = -p\vec{n} = \underline{\underline{\tau}} \vec{n} \longrightarrow \underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{I}} \quad ; \quad \underline{\underline{I}} = \text{matrice identità} \quad (\text{tensore isotropo o sferico})$$

$$\vec{\tau}_n \equiv -p \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -pn_1 + 0 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 \\ 0 \cdot n_1 - pn_2 + 0 \cdot n_3 \\ 0 \cdot n_1 + 0 \cdot n_2 - pn_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \equiv -p \underline{\underline{I}} \vec{n}$$

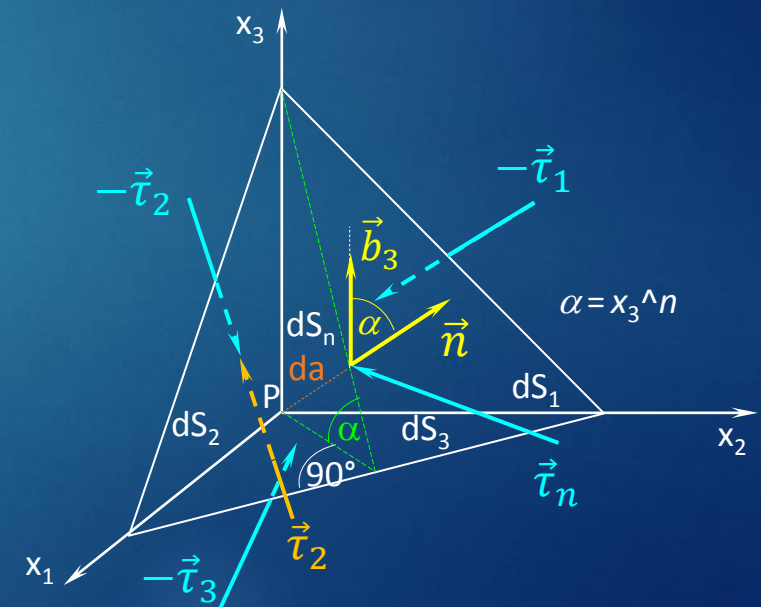
$$\checkmark \quad \tau_{ij} = -p \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{delta di Kronecker})$$

► Fluidi ideali ($\mu = 0$, $\tau_{ij} = 0$ per $i \neq j$)

- Ripetiamo il ragionamento che ha condotto alla $\vec{\tau}_n dS_n = \vec{\tau}_j dS_j$
- imponendo equilibrio lungo i tre assi con $\tau_{ij} = 0$ per $i \neq j$ si ottiene

$$\vec{\tau}_n = -p\vec{n}$$

- ✓ Lo stato di sforzo in un fluido ideale in moto è di tipo idrostatico





Tensore degli sforzi (polo O)

- Bilancio del momento della quantità di moto (polo O) su volume materiale parallelepipedo

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \vec{r} \times \rho \vec{u} dV = \int_{V_m} \vec{r} \times \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_m} \vec{r} \times \vec{\tau}_n dS$$

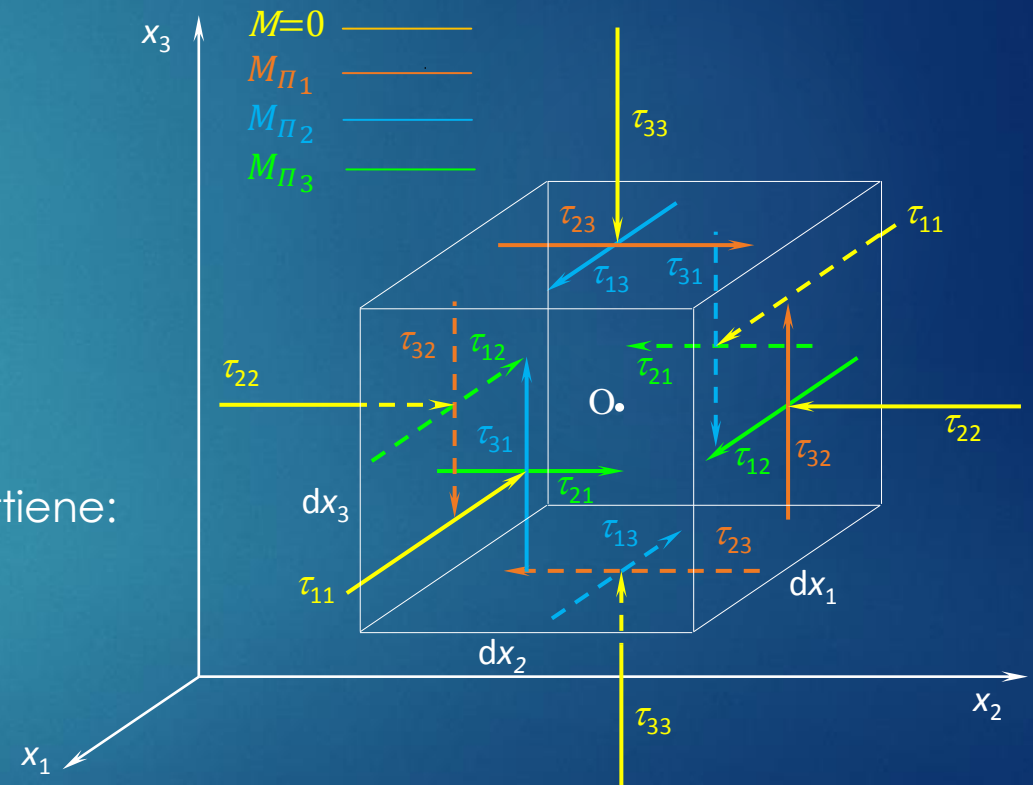
- Da ragionamento analogo a Teorema di Cauchy

$$\vec{M}_\Pi = \int_{S_m} \vec{r} \times \vec{\tau}_n dS = 0 \equiv \begin{pmatrix} M_{\Pi 1} \\ M_{\Pi 2} \\ M_{\Pi 3} \end{pmatrix}$$

- Uguagliando a zero le 3 componenti del momento si ottiene:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

- ✓ Il tensore degli sforzi è simmetrico
- ✓ 6 componenti indipendenti del tensore degli sforzi (9 – 3 relazioni di simmetria)
- ✓ Considerando la simmetria del tensore si tiene conto del bilancio del momento della q.d.m.





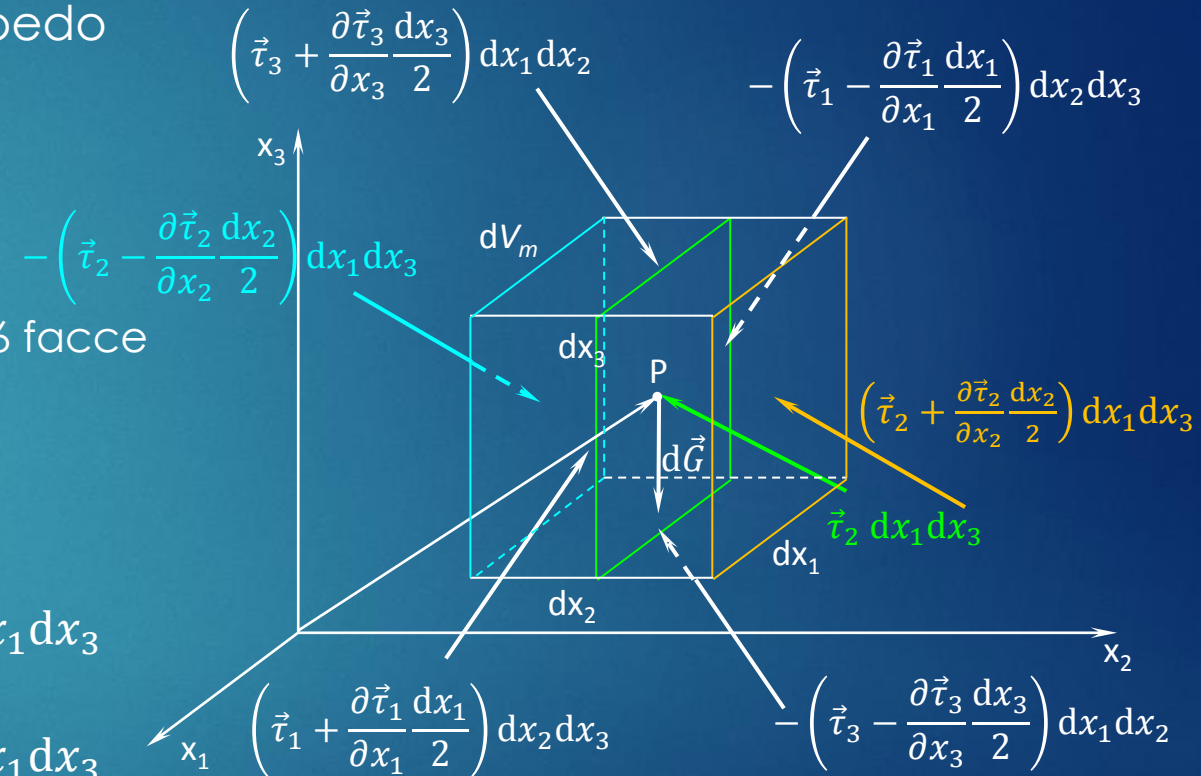
Equazione indefinita del moto

► Bilancio q.d.m. su volume materiale parallelepipedo

- $\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \vec{u} dV = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_m} \vec{\tau}_n dS$
- V_m infinitesimo + conservazione della massa:

$$\rho dV_m \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m dV_m + d\vec{H} \quad d\vec{H} \text{ risultante forze su 6 facce}$$
- Forze su superfici perpendicolari ad asse x_2 :
 - contenente P, verso x_2 crescenti $\vec{\tau}_2 dx_1 dx_3$
 - Faccia verso x_2 crescenti: $\left(\vec{\tau}_2 + \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3$
 - Faccia verso x_2 decrescenti: $-\left(\vec{\tau}_2 - \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3$
 - Risultante: $\left(\vec{\tau}_2 + \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3 - \left(\vec{\tau}_2 - \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2}\right) dx_1 dx_3$

$$= \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial x_2} dx_2 dx_1 dx_3 = \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial x_2} dV_m$$



- Somma contributi delle 3 coppie di facce

$$d\vec{H} = \left(\frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{\tau}_3}{\partial x_3} \right) dV_m = \frac{\partial \vec{\tau}_j}{\partial x_j} dV_m$$



Equazione indefinita del moto

- Bilancio q.d.m. su volume materiale parallelepipedo

$$\rho dV_m \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m dV_m + d\vec{\Pi} \quad d\vec{\Pi} = \frac{\partial \vec{\tau}_j}{\partial x_j} dV_m$$

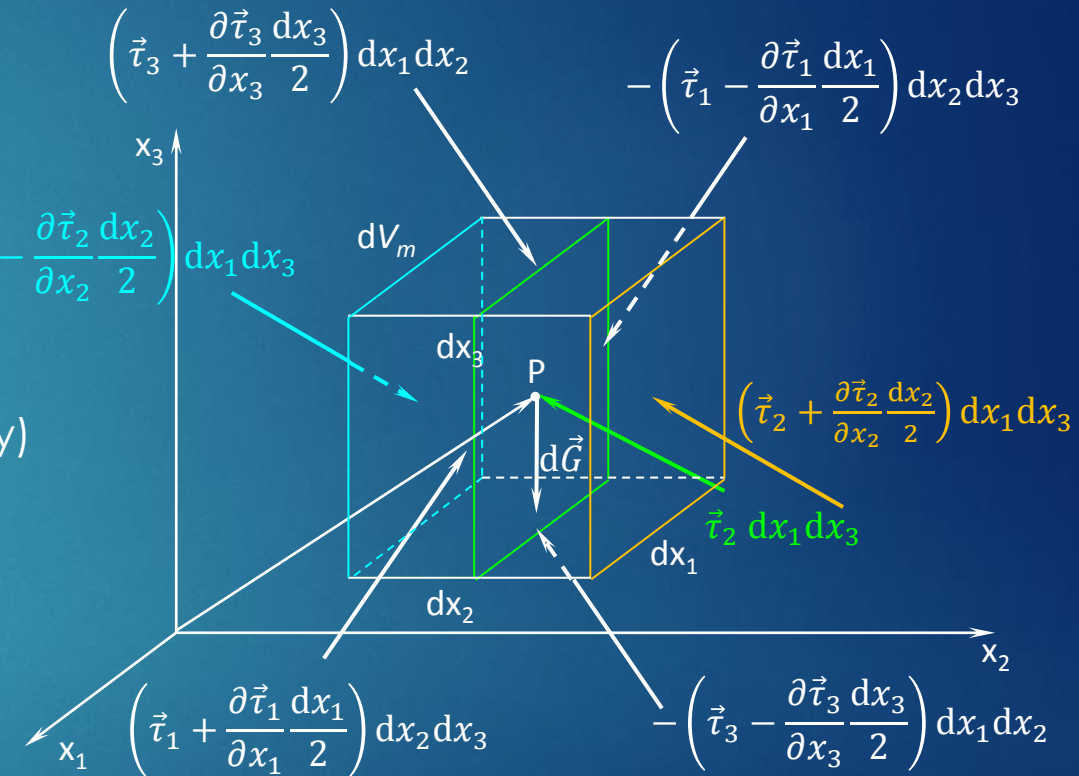
- Inserendo in bilancio di q.d.m. e semplificando dV_m

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m + \frac{\partial \vec{\tau}_j}{\partial x_j}} \quad (\text{Equazione di Cauchy})$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial \vec{\tau}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \vec{\tau}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{\tau}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{\tau}_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

- ✓ $\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$ divergenza del tensore degli sforzi
(per analogia con divergenza di un vettore)

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}}$$



- Forma per componenti

$$\boxed{\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{m_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}$$



Posizione problema idrodinamico

► Bilancio incognite-equazioni

	Incognite	N°
ρ	Densità	1
u_i	Velocità	3
τ_{ij}	Sforzi (linearmente indipendenti)	6
	Totale	10

	Equazioni	N°
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$	Eq. di continuità	1
$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$	Eq. del moto	3
	Totale	4

- ✓ Mancano 6 equazioni (quante sono le componenti indipendenti del tensore degli sforzi)
- ✓ Relazioni mancanti date dal legame sforzi – velocità di deformazione (*legame o legge costitutivo/a*)

► Legame costitutivo per fluido Newtoniano. Requisiti:

- Lineare
- Omogeneo (identico in ogni punto della massa fluida)
- Isotropo (medesimo comportamento lungo tutte le direzioni)
- Indipendente da sistema di riferimento adottato
- Tensore si riduce a sferico nei casi idrostatico o di fluido ideale



Legge costitutiva fluidi Newtoniani

- Decomposizione del tensore degli sforzi in parte statica (sferica) e parte dinamica (deviatore)

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{11} + p & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} + p & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} + p \end{pmatrix} = -p \underline{\underline{I}} + (\underline{\underline{\tau}} + p \underline{\underline{I}})$$

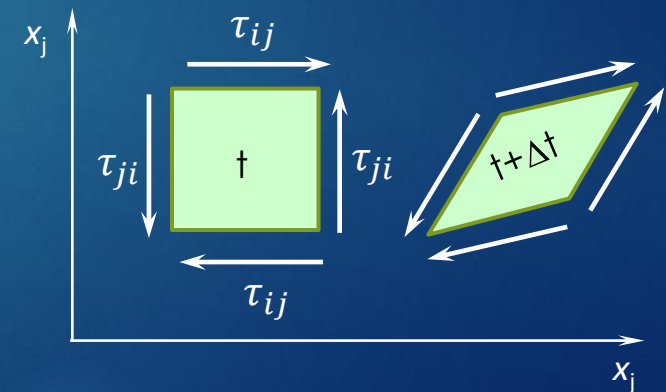
$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + (\tau_{ij} + p\delta_{ij})$$

- ✓ La pressione statica p è un'incognita aggiuntiva
- ✓ Tensore sferico legato a variazioni volumetriche (densità) \longrightarrow equazione di stato $\rho = \rho(p, T, S)$
- ✓ Deviatore legato a velocità di deformazione (v.d.d.)

- Deviatore (fluido incompressibile, isoterma, omogeneo: $\rho = \text{cost}$)

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} \text{ (sforzi tangenziali)} \longrightarrow \text{in generale } \frac{d\theta_k}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad i \neq j \neq k$$

- Estensione legame per sforzi tangenziali: $\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
- Estensione legame a sforzi assiali $\tau_{ij} + p\delta_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = 2\mu d_{ij}$





Legge costitutiva fluidi Newtoniani

► Deviatore (fluido comprimibile)

- $d_{ij} = d_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ elemento del tensore v.d.d. $\underline{\underline{D}}$

- $i = j \longrightarrow d_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ (singolo elemento diagonale di $\underline{\underline{D}}$)

- Traccia di $\underline{\underline{D}}$: $\text{tr}(\underline{\underline{D}}) = d_{ii} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}$

✓ $\underline{\underline{D}}$ rappresenta anche velocità di deformazione a volume variabile

- Da esperimenti: velocità di variazione volumetrica non dipende da viscosità

- Deviatore degli sforzi dipende solo da v.d.d. a volume costante (deviatore tensore v.d.d.)

- Decomposizione tensore velocità di deformazione (sferico + deviatore)

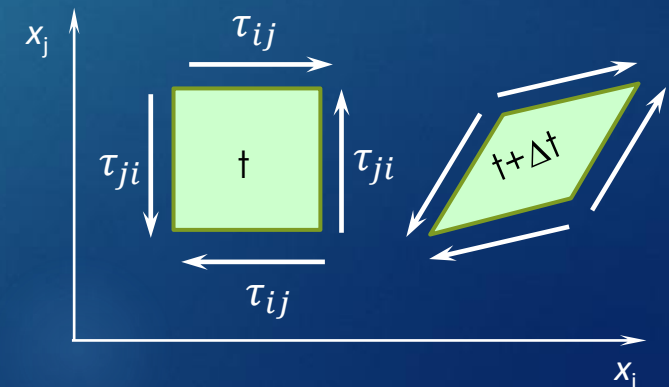
$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \underline{\underline{I}} + \left(\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \underline{\underline{I}} \right) \quad d_{ij} = \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right]$$

✓ Parte sferica rappresenta velocità di variazione volumetrica

✓ Deviatore rappresenta v.d.d. a volume costante: $\text{tr} \left(\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \underline{\underline{I}} \right) = 0$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \end{pmatrix}$$





Legge costitutiva fluidi Newtoniani

- Legame costitutivo per fluidi comprimibili:

$$\tau_{ij} + p\delta_{ij} = 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad \text{ovvero} \quad \underline{\underline{\tau}} + p\underline{\underline{I}} = 2\mu \left(\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \underline{\underline{I}} \right)$$

✓ Fluido in quiete $\longrightarrow \vec{u} \equiv 0 \longrightarrow \tau_{ij} = -p\delta_{ij} \longleftrightarrow \underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}}$

✓ Fluido ideale $\longrightarrow \mu = 0 \longrightarrow \tau_{ij} = -p\delta_{ij} \longleftrightarrow \underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}}$

- Significato della pressione

• $\text{tr} \left(\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \underline{\underline{I}} \right) = 0 \longrightarrow \text{tr} \left(\underline{\underline{\tau}} + p\underline{\underline{I}} \right) = 0$

• $\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} + 3p = 0 \longrightarrow p = -\frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}}{3} = -\frac{\tau_{ii}}{3}$ invariante per cambio sistema di riferimento

- ✓ La pressione è una caratteristica locale intrinseca (non dipende dal sistema di riferimento assunto)

- Chiusura bilancio equazioni – incognite (scalari)

- Incognite: densità (1), pressione (1), velocità (3), componenti tensore $\underline{\underline{\tau}}$ (6) : 11 incognite
- Equazioni: stato (1), continuità (1), moto (3), legame costitutivo (6) : 11 equazioni



Equazione di Navier-Stokes

- Chiusura bilancio equazioni – incognite (scalari)
 - ✓ Problema ben posto (numero di equazioni = numero di incognite) ma notevolmente oneroso
 - ✓ Frequentemente il dato di interesse è unicamente il campo di velocità
 - ✓ Se anche sforzi fossero di interesse, è utile poter risolvere un sistema ridotto e ricavarli successivamente

► Equazione del moto per un fluido viscoso Newtoniano

- Equazione del moto (di Cauchy)

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad ; \quad \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

- Legge costitutivo

$$\tau_{ij} + p\delta_{ij} = 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad ; \quad \underline{\underline{\tau}} + p\underline{\underline{I}} = 2\mu \left(\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{u} \underline{\underline{I}} \right)$$

- Eliminazione degli sforzi incogniti dall'equazione del moto

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -p\delta_{ij} + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\}$$



Equazione di Navier-Stokes

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{m_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -p\delta_{ij} + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\} \quad i = 1, 2, 3$$

1. Termine di pressione

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ij}) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (p\delta_{ij}) = -\left[\frac{\partial}{\partial x_1} (p\delta_{i1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (p\delta_{i2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (p\delta_{i3}) \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

✓ Qualunque sia il valore di i fissato, l'unico $\delta_{ij} = 1$ è quello per cui $j = i$; gli altri due sono nulli

2. Termine del tensore velocità di deformazione

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

3. Termine parte sferica del tensore velocità di deformazione (contenente δ_{ij} : sviluppo analogo a p)

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ 2\mu \left[-\frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right\} = -\frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) = -\frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

4. Da sviluppi 2 e 3 : $\mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{u})$



Equazione di Navier-Stokes

- Riordinando (Equazione di Navier-Stokes):

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{m_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \quad i = 1, 2, 3$$

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{f}_m - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \mu \nabla(\nabla \cdot \vec{u})$$

- ∇^2 operatore di Laplace o Laplaciano (divergenza del gradiente): $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$
- $\nabla(\nabla \cdot \vec{u})$ gradiente della divergenza di \vec{u}

- Dividendo per la densità ρ :

$$\frac{Du_i}{Dt} = f_{m_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{f}_m - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla(\nabla \cdot \vec{u})$$

✓ Compare viscosità cinematica ν

- Forma con inerzia locale e accelerazione convettiva

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = f_{m_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{f}_m - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla(\nabla \cdot \vec{u})$$



Equazione di Navier-Stokes

► Casi particolari

- Fluido incompressibile (, isoterma e omogeneo): $\rho = \text{cost} \longrightarrow \nabla \cdot \vec{u} = 0$

$$\frac{Du_i}{Dt} = f_{m_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{f}_m - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

- Fluido pesante (forza peso unica forza di massa): $\vec{f}_m = -g \nabla z$

$$\frac{Du_i}{Dt} = -g \frac{\partial z}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla z - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

- Fluido pesante, incompressibile (, isoterma e omogeneo) e ideale ($\mu = \nu = 0$)

$$\frac{Du_i}{Dt} = -g \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \quad (\text{Equazione di Eulero})$$

- Nel caso comune di fluido pesante incompressibile (, isoterma e omogeneo) il moto si studia con le:

$$\begin{cases} \frac{Du_i}{Dt} = -g \frac{\partial}{\partial x_i} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) + \nu \nabla^2 \vec{u} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

✓ $z + \frac{p}{\rho g} = z + \frac{p}{\gamma} = h$ (quota piez.)

✓ 4 equazioni

4 incognite: $p, u_i \quad i = 1, 2, 3$



Equazione globale del moto

- Da bilancio di quantità di moto per volume materiale finito

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \vec{u} dV = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_m} \vec{\tau}_n dS$$

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{\Pi}$$

- Teorema del trasporto

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \vartheta dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \vartheta dV + \int_{S_c} \vartheta \vec{u} \cdot \vec{n} dS \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV + \int_{S_c} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV + \int_{S_c} \vec{\tau}_n dS$$

- Da equazione indefinita del moto

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \longrightarrow \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \longrightarrow \int_{V_c} \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV = \int_{V_c} \left(\rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) dV$$

$$\int_{V_c} \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV = \int_{V_c} \left(\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} - u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) dV = \int_{V_c} \left[\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} - u_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \right) \right] dV$$

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} dV = \int_{S_c} \rho u_i u_j \cos x_j \wedge n dS = \int_{S_c} \rho u_i (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = M_i$$

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} dV = I_i$$

$$\int_{V_c} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_{S_c} \tau_{ij} \cos x_j \wedge n dS = \int_{S_c} \tau_{in} dS = \Pi_i$$

$$\int_{V_c} \rho f_{mi} dV = G_i$$

✓ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$
Eq. di continuità



Equazione globale del moto

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{\Pi}$$

- $\vec{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV$ Inerzia locale
- $\vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS$ Flusso di quantità di moto
- $\vec{G} = \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV$ Risultante forze di massa
- $\vec{\Pi} = \int_{S_c} \vec{\tau}_n dS$ Risultante forze di superficie

► Forma per fluido viscoso Newtoniano: $\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$; $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)$

$$\int_{V_c} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \int_{S_c} p \cos x_i \wedge n dS = \left(\int_{S_c} p \vec{n} dS \right)_i \quad \vec{\Pi}_p = \int_{S_c} -p \vec{n} dS$$

$$\int_{V_c} \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} dV = \mu \int_{S_c} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cos x_j \wedge n dS = \mu \int_{S_c} \frac{\partial u_i}{\partial n} dS = \mu \left(\int_{S_c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS \right)_i \quad \vec{\Pi}_\mu = \mu \int_{S_c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS$$

$$\int_{V_c} \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) dV = \frac{1}{3} \mu \int_{S_c} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \cos x_i \wedge n dS = \frac{1}{3} \mu \left(\int_{S_c} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \vec{n} dS \right)_i \quad \vec{\Pi}_{\mu'} = \frac{1}{3} \mu \left(\int_{S_c} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \vec{n} dS \right)$$

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu + \vec{\Pi}_{\mu'}$$



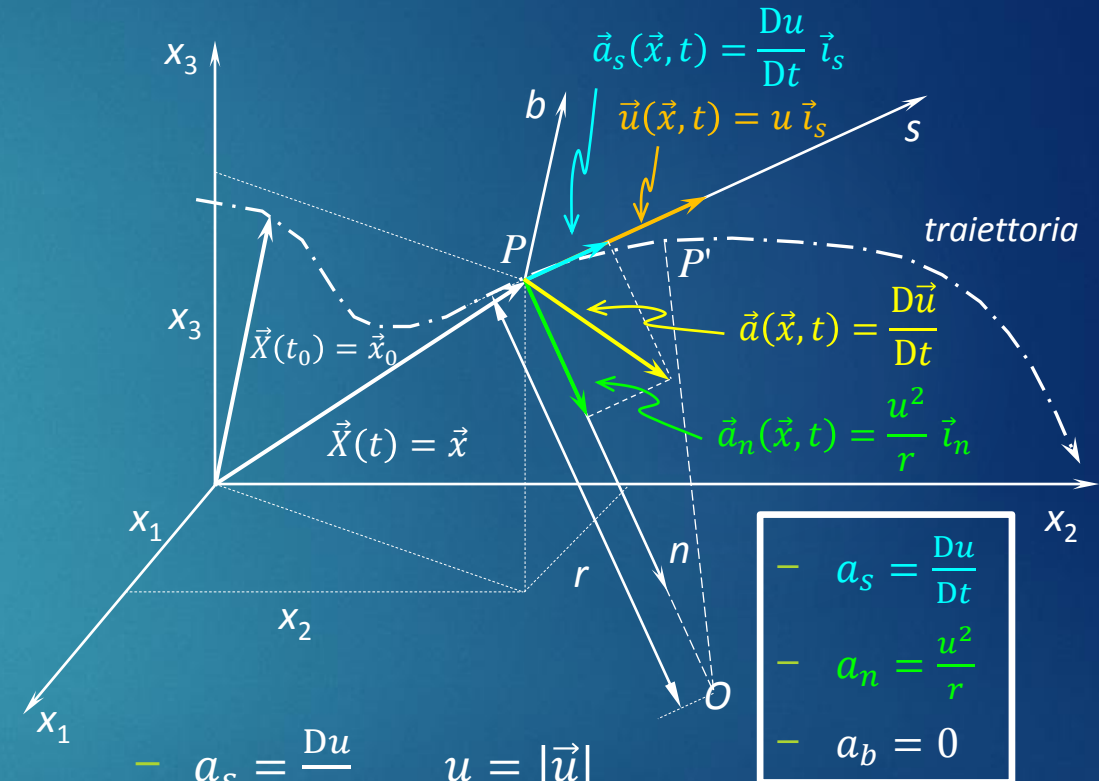
Analisi locale del moto di una particella fluida

► Terna intrinseca al moto

- Tangente s : tangente a traiettoria, equivale a \vec{u}
- Normale n : verso centro di curvatura locale
- Binormale b : forma terna destra con s e n
- ✓ s e n giacciono sul piano osculatore del moto
- ✓ Traiettoria localmente approssimata da arco di circonferenza di centro O (centro di curvatura locale) e raggio r (raggio di curvatura locale), contenuto in piano osculatore

► Componenti dell'accelerazione

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \frac{D\vec{u}}{Dt} \equiv \begin{pmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{u^2}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \text{ giace sul piano osculatore}$$



$$- a_s = \frac{Du}{Dt} \quad u = |\vec{u}|$$

✓ $a_s = 0$ in moto circolare uniforme

$$- a_n = \frac{u^2}{r} = \text{accelerazione centripeta}$$

✓ $a_n = \text{cost}$ in moto circolare uniforme

Analisi locale del moto di una particella fluida

- Eq. di Navier-Stokes per fluido pesante incompressibile

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g\nabla\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) + \nu \nabla^2 \vec{u} \longrightarrow \frac{1}{g} \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla h + \frac{\nu}{g} \nabla^2 \vec{u}$$

- Proiezione sul piano normale n - b

$$\frac{1}{g} \frac{u^2}{r} = \left(-\nabla h + \frac{\nu}{g} \nabla^2 \vec{u}\right) \cdot \vec{l}_n = -\frac{\partial h}{\partial n} + \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_n$$

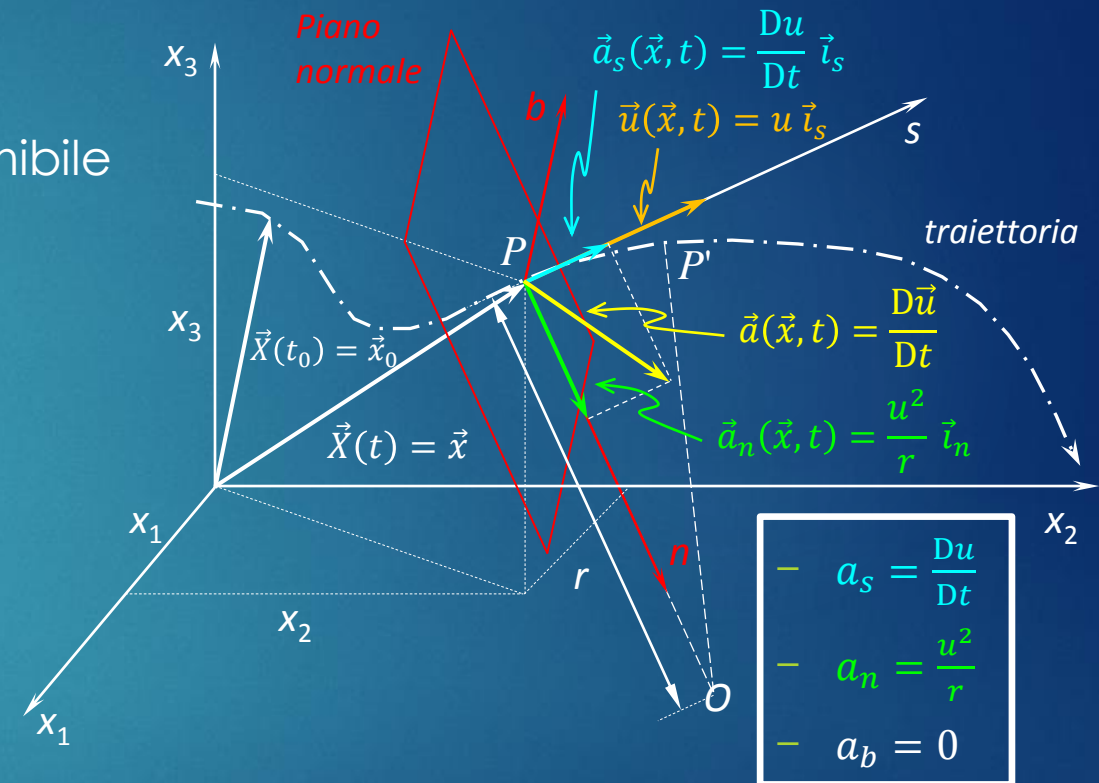
$$0 = \left(-\nabla h + \frac{\nu}{g} \nabla^2 \vec{u}\right) \cdot \vec{l}_b = -\frac{\partial h}{\partial b} + \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_b$$

- Differenziale quota piezometrica sul piano normale

$$dh = \frac{\partial h}{\partial n} dn + \frac{\partial h}{\partial b} db$$

- Ipotesi di fluido ideale ($\mu = \nu = 0$) $\longrightarrow dh = -\frac{1}{g} \frac{u^2}{r} dn$

✓ $\frac{1}{g} \frac{u^2}{r} \ll 1 \longrightarrow dh \cong 0 \longrightarrow h \cong \text{cost} \text{ (Legge di Stevin)}$



- ✓ Corrente con traiettorie caratterizzate da grandi raggi di curvatura \longrightarrow definibili sezioni rette (normali a velocità punto per punto), \approx piane, dette *regolari*, su cui la distribuzione delle pressioni è idrostatica ($h = \text{cost}$)



Teorema di Bernoulli

- Eq. di Navier-Stokes (fluido pesante incompressibile)

$$\frac{1}{g} \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla h + \frac{\nu}{g} \nabla^2 \vec{u} \quad ; \quad h = z + \frac{p}{\gamma}$$

- Proiezione sull'asse tangente

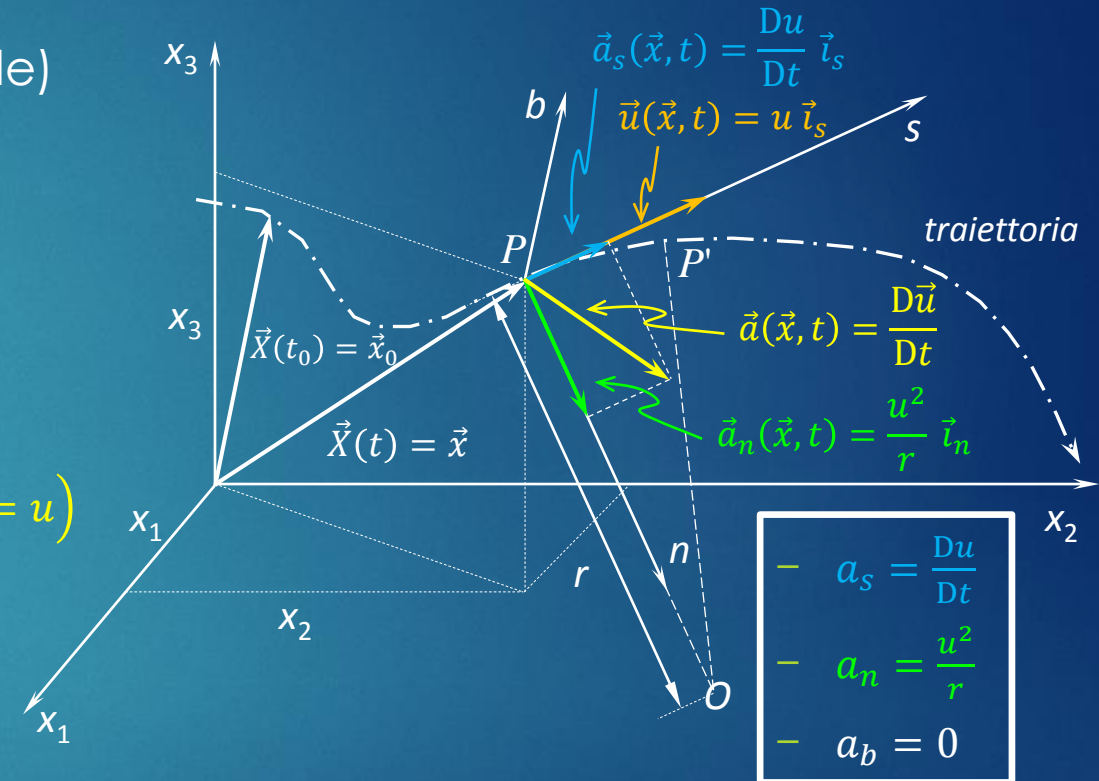
$$\frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} = \left(-\nabla h + \frac{\nu}{g} \nabla^2 \vec{u} \right) \cdot \vec{t}_s = -\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s$$

- Memo: $\left(\frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial s} u_s + \frac{\partial \vartheta}{\partial n} u_n + \frac{\partial \vartheta}{\partial b} u_b ; u_n = u_b = 0, u_s = u \right)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{g} u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2/2g)}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial s} \\ &= \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{u^2}{2g} \right) = \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) \end{aligned}$$

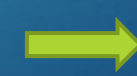
- Riordinando: $\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s$

$$\checkmark \quad H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = h + \frac{u^2}{2g} \quad \text{carico totale}$$



- Ipotesi: fluido ideale ($\mu = \nu = 0$), moto stazionario

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0$$



$$H = \text{cost}$$

lungo una traiettoria

(Teorema di Bernoulli)



Teorema di Bernoulli

► Carico totale (trinomio di Bernoulli)

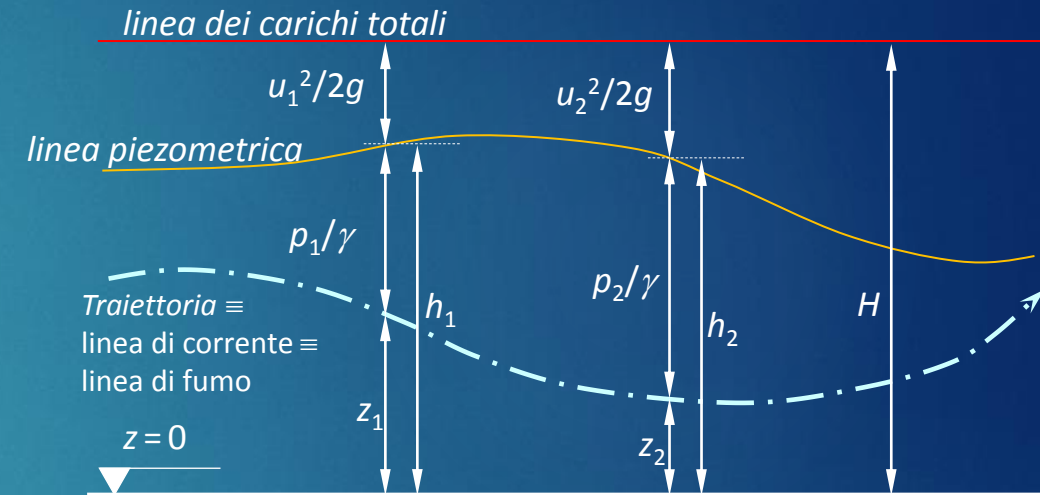
$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = h + \frac{u^2}{2g} \quad ; \quad \frac{u^2}{2g} = \text{altezza cinetica}$$

• Significato fisico del carico totale

- La quota piezometrica h è l'energia potenziale totale (peso + pressione) per unità di peso di fluido
- Un corpo di volume V , densità ρ , massa $m = \rho V$, peso $W = gm$ e velocità u possiede l'energia cinetica

$$E_c = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}\rho Vu^2 = \rho gV \frac{u^2}{2g} = W \frac{u^2}{2g} \longrightarrow \frac{u^2}{2g} = \frac{E_c}{W}$$

- L'altezza cinetica rappresenta l'energia cinetica per unità di peso di fluido
- Il carico totale rappresenta l'energia meccanica totale (potenziale + cinetica) per unità di peso di fluido



- Significato geometrico del Teorema di Bernoulli
Lungo una traiettoria si mantiene costante la somma di quota geodetica, altezza piezometrica e altezza cinetica della particella
- ✓ Effetto Venturi: ad un aumento della velocità corrisponde una diminuzione della quota piezometrica (e della pressione se $z = \text{cost}$)

Schema di fluido ideale

- Moto stazionario, fluido viscoso ($\mu \neq 0 \Rightarrow \nu \neq 0$)

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s$$

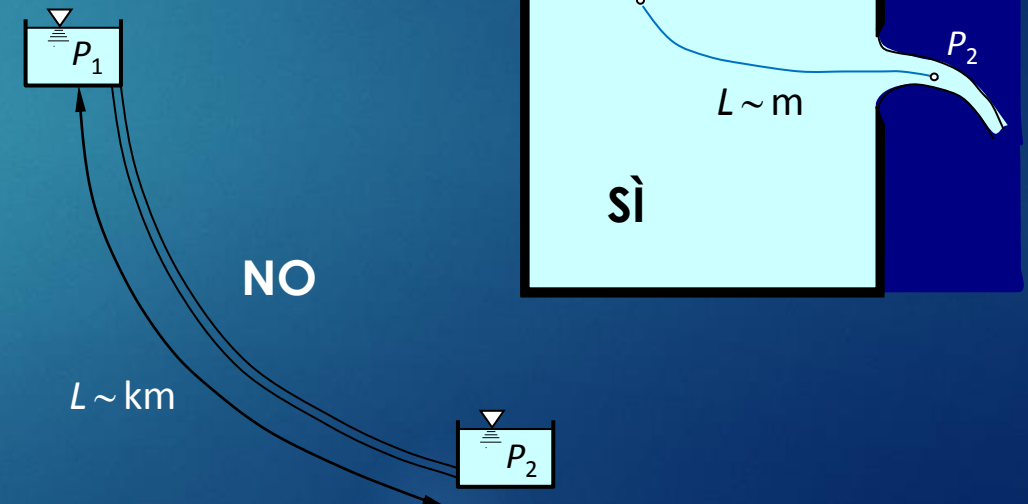
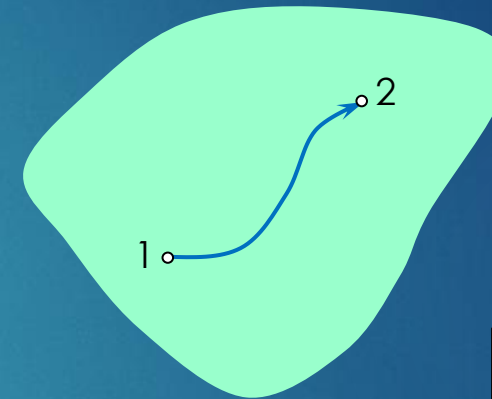
- Variazione di H lungo un percorso fra i punti 1 e 2

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s \longrightarrow \int_1^2 \frac{\partial H}{\partial s} ds = H_2 - H_1 = \int_1^2 \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s ds$$

- Se il percorso è abbastanza breve, l'integrale del termine viscoso è trascurabile; si ha quindi:

$$H_2 - H_1 \cong 0 \longrightarrow H_2 \cong H_1 \longrightarrow H \cong \text{cost}$$

- ✓ può essere applicato lo schema di fluido ideale
- applicabilità schema di fluido ideale dipende da:
 - lunghezza del percorso
 - caratteristiche del campo di moto ($\nabla^2 \vec{u}$)
 - caratteristiche del fluido (ν)



Moti stazionari: perdite di carico

- Come varia il carico totale lungo la traiettoria ?

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s \quad \longrightarrow \quad \text{dipende dal segno del termine viscoso}$$

- Moto uniforme in condotto cilindrico a sezione circolare

✓ Particelle in moto rettilineo uniforme (traiettorie rettilinee e parallele)

✓ $\vec{u} = u \vec{l}_s$; $\vec{l}_s = \text{cost}$; $u = \text{cost}$ lungo s $\longrightarrow \partial u / \partial s = \partial^2 u / \partial s^2 = 0$

✓ Traiettorie rettilinee e parallele \longrightarrow qualunque coppia di assi sul piano della sezione è coppia assi n, b

✓ Aderenza a pareti \longrightarrow le sezioni del solido di velocità rivolgono la concavità verso l'asse delle ascisse

$$(\nabla^2 \vec{u})_s = \vec{l}_s \cdot \nabla^2 (u \vec{l}_s) = \vec{l}_s \cdot \vec{l}_s \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial b^2} < 0 \quad \text{per la concavità dei profili}$$

✓ $\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \vec{u})_s < 0$ Il carico totale diminuisce nel senso del moto (perdite di carico)

- Moto stazionario generico: il risultato per il moto uniforme in condotto cilindrico a sezione circolare si estende alla generalità delle correnti (flussi unidimensionali) stazionarie: H diminuisce nel senso del moto

